同余

- $(a + b)\%c$
- $(a - b)\%c$
- $(a * b)\%c$

Gcd lcm

- Gcd
- Lcm
- https://noip.ac/show_problem/3292

进制转换

- K进制转十进制
- 十进制转k进制
- https://noip.ac/show_problem/3293

高精度

- 加
- 乘
- 减
- 负数

素数

- 定义
- 判定方法

素数的判定（素性测试）

- Miller-Rabin素性测试
- 如果n为素数，取$a < n$,设$n - 1 = d \times 2^r$，则要么$a^d \equiv 1 \pmod n$，要么$\exists 0 \le i < r, s.t. a^{d \times 2^i} \equiv -1 \pmod n$

素数的判定

- 常规做法：选取k个不同的数进行miller-rabin素性测试
- 如果都通过则为质数

- 2,3,5,7,13,29,37,89

- $O(k\log n)$
- https://noip.ac/show_problem/3156

逆元

- 如果$(a,m)=1$且存在唯一的b使得$a\times b\equiv 1 \pmod{m}$且$1\le b<m$,则$b$为$a$在模$m$意义下的逆元
- 费马小定理 $a^{p-1}\equiv 1$
- 欧拉定理 $a^{\phi(m)}\equiv 1$

线性求逆元

- 求$1-n$所有数对p的逆元？

线性求逆元

- $\forall 1 \le i \le n, p = ki + r$
- $ki + r \equiv 0 (mod\ p)$
- $kr^{-1} + i^{-1} \equiv 0 (mod\ p)$
- $i^{-1} \equiv -kr^{-1} (mod\ p)$
- $i^{-1} \equiv -\left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor (p\ mod\ i)^{-1}$

ExGCD

- 给定a, b
- 知道$g = \gcd(a, b)$
- 求x, y
- 使得
- $xa + yb = g$

ExGCD

Solution (扩展欧几里得算法)

```
int ExGcd(int a, int b, int &x, int &y) {
  if (b == 0) {
    x = 1, y = 0;
    return a;
  }
  else {
    int g = ExGcd(b, a % b, x, y);
    int t = x;
    x = y, y = t - a / b * x;
    return g;
  }
}
```

拓展中国剩余定理

- 问题定义：
- 给定N个方程
- $x \equiv b_i (mod\ m_i)$
- 求x

方法一：大数翻倍法

- 考虑合并两个方程
- $x \equiv b_1 (mod\ p_1), x \equiv b_2 (mod\ p_2), p_1 > p_2$
- 则暴力枚举
- $b_1, b_1 + p_1, b_1 + 2p_1, \cdots$
- 检查是否满足条件
- 至多只用枚举p_2次

- 复杂度?

方法二——拓展欧几里得

- 考虑合并两个方程
- $x \equiv b_1(mod\ p_1), x \equiv b_2(mod\ p_2)$
- 则
- $x = k_1p_1 + b_1 = k_2p_2 + b_2 \Rightarrow k_1p_1 - k_2p_2 = b_2 - b_1$
- 设$g = \gcd(p_1, p_2)$则
- $\frac{p_1}{g}k_1 \equiv \frac{b_2-b_1}{g}\left(mod\,\frac{p_2}{g}\right)$
- 用扩欧解出k_1之后则有答案

筛法——线性筛

Solution (線性篩法)

```
for (int i = 2; i <= n; ++ i) {
  if (!not_prime[i]) prime[++ prime_cnt] = i;
  for (int j = 1; j <= prime_cnt; ++ j) {
    if (prime[j] * i > n) break;
    not_prime[prime[j] * i] = true;
    if (i % prime[j] == 0) break;
  }
}
```

基本计数原理

- 加法原理
- 乘法原理

排列组合

- 组合：
- 从n个元素中选取r个元素，当不计顺序时，其方案数为：
- $C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

- 排列：
- 从n个元素中选取r个元素，当考虑顺序时，其方案数为：
- $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Question 1

- 有n个不同元素
- 从中选r个，但是每个可以选多次（可重）
- 求证：其方案数为$C(n+r-1,r)$

Question 1

- 假设选$a_1 \le \cdots \le a_r$
- 转化为$a_1, a_2 + 1, \cdots, a_r + r - 1$

Question 2

- 有n个不同元素
- 从中选r个，但是选择的元素不能相邻
- 求证：其方案数为$C(n-r+1,r)$

组合数极其相关性质

- $C(n+m,n)=C(n+m,m)$
- $C(n,m)=C(n-1,m-1)+C(n-1,m)$
- $C(n+r+1,r)=C(n+r,r)+C(n+r-1,r-1)+\cdots+C(n,0)$
- $C(n,l)C(l,r)=C(n,r)C(n-r,l-r)$
- $C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)=2^n$
- $C(n,0)-C(n,1)+C(n,2)-\cdots=0$
- $C(r,r)+C(r+1,r)+\cdots+C(n,r)=C(n+1,r+1)$
- $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)x^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)x^k$

Question 4

- 求$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2$

组合数取模

- 目标：$C(n,m)\ mod\ k$

- 情况二：$k > 1, nm \leq 10^7$

组合数取模

- 目标：$C(n,m)\ mod\ k$

- 情况三：$n \le 10^9, m \le 10^4, k \le 10^9$

组合数取模

- 目标：$C(n,m)\ mod\ k$

- 情况三：$n \le 10^9, m \le 10^4, k \le 10^9$
- 核心要点：上下相除至多只需要计算$O(m)$项
- 方法一：对每一项分解质因数，快速幂合并
- 方法二：逆元做除法，中国剩余定理合并

组合数取模

- 目标：$C(n,m)\ mod\ k$

- 情况四：$n,m \le 10^{10}$，k为小质数

组合数取模

- 目标：$C(n,m)\ mod\ k$

- 情况四：$n,m \le 10^{10}$，k为小质数

- 卢卡斯定理

组合数取模

- 目标：$C(n,m)\ mod\ k$

- 情况五：$n,m \leq 10^9, k \leq 10^5$

组合数取模

- 质因数分解+中国剩余定理合并
- 对于单个质因子，设为p^k
- 则我们可以把$n!$拆分成p^k的循环节，顺便统计p的因子个数
- 再对$p, 2p, \cdots$单独处理
- $O\left(\log_p n\right)$

Problem 1

- 要求你把x拆成k个不同的组合数之和
- 只要n1 n2或者m1 m2不同 就叫做不同的组合数
- 输出任意一种方案
- x<=10^9 k<=10^3

Problem 1

- Luogu 4369

Problem 2

- 比较 C(n1,m1) 和 C(n2,m2) 的大小关系

Problem 2

- $C(n,m)=n!/m!/(n-m)!$

Problem 3

- 找到k个不同的组合数
- 使得这k个组合数的和最大
- 要求你找的组合数 C(a,b) 满足 0<=b<=a<=n
- 求最大的和
- n<=10^6 k<=10^5

Problem 3

- Problem2+加上一个堆
- Luogu 4370

Problem 4

小葱在 NOIP 的时候学习了 C_i^j 和 k 的倍数关系，现在他想更进一步，研究更多关于组合数的性质。小葱发现，C_i^j 是否是 k 的倍数，取决于 $C_i^j \bmod k$ 是否等于 0 ，这个神奇的性质引发了小葱对 mod 运算（取余数运算）的兴趣。现在小葱选择了是四个整数 n, p, k, r ，他希望知道

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} C_{nk}^{ik+r}\right) \bmod p,$$

即

$$\left(C_{nk}^{r} + C_{nk}^{k+r} + C_{nk}^{2k+r} + \cdots + C_{nk}^{(n-1)k+r} + C_{nk}^{nk+r} + \cdots\right) \bmod p$$

的值。

Problem 4

- Luogu 3746

Problem 5

- 组合数C(n,m)表示的是从n个物品中选出m个物品的方案数。举个例子，从(1,2,3)三个物品中选择两个物品可以有(1,2),(1,3),(2,3)这三种选择方法。根据组合数的定义，我们可以给出计算组合数C(n,m)的一般公式：
- C(n,m)=n!/m!*(n?m)!
- 其中n!=1×2×⋯×n。（额外的，当n=0时，n!=1）
- 小葱想知道如果给定n,m和k，对于所有的0⩽i⩽n，0⩽j⩽min(i,m)有多少对(i,j)满足C(i,j)是k的倍数。
- 1⩽n,m⩽10^18，1⩽t,k⩽100，且 k 是一个质数

Problem 5

- 数位dp
- Bzoj 4737

抽屉原理

- 把$n+1$个物品放到n个抽屉里，则至少有一个抽屉含有两个或两个以上物品

Problem 6

- 给定N个数
- 要求从中选出任意多个数
- 使得他们和为c的倍数

- $c \le N \le 10^5$

Problem 6

- 随便找c个数
- 前缀和+抽屉原理

- POJ 3370

Problem 7

- N种糖，第i种有a_i个
- 要求把所有糖吃光
- 相邻两颗糖不一样
- 能否吃光所有糖

- $N \le 10^5, a_i \le 10^5$

Problem 7

- 只需要检查最多的糖能否被剩下的糖隔开
- HDU 1205

Problem 8

- 平面上有个N个点(x_i, y_i)
- 用三个$L \times L$的正方形覆盖所有点（平行于坐标轴）
- 问最小的L

- $N \leq 5 \times 10^4$

Problem 8

- 二分答案

- 矩形四个角一定有一个地方需要一个矩形
- 以此类推

- BZOJ 1052

容斥原理

- 现有$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$总共$n$个集合
- 现在已知任意多个子集交集的大小
- 则所有集合并集的大小为
- $\sum_{B\subseteq\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}}(-1)^{|B|+1}\cdot\left|\bigcap_{A_i\in B}A_i\right|$

- 此即为容斥原理

Problem 10

- 网格中每步可以走(0……Mx,0……My)中任意非零向量
- 有K种向量不能走
- 分别是(ki,ki) ki一定是10的倍数
- 求从(0,0)走到(Tx,Ty)的方案数
- Tx,Ty,Mx,My<=800,R<=1600,K<=50

Problem 10

- f[i][x][y]表示走i步到xy方案数
- g[i][z]表示走i步到10z 10z方案数
- 答案可容斥
- x与y无关，可分割
- TC SRM 498 Div1 1000PT

Problem 12

- 给定三视图的左视图和正视图的情况
- 求有多少种可能的情况

- $N, M \leq 100$

Problem 12

- 排序后对同高度进行容斥

- P99 T3

Problem 13

- 询问$1-N$中有多少个数可以表示成$x^y, y>1$的形式
- $N \le 10^{18}$

Problem 13

- 可能的y的量非常非常少
- 直接枚举容斥
- HDU 2204

概率和期望

随机试验

- 随机试验:
- （1）不能预先确知结果
- （2）试验之前可以预测所有可能结果或范围
- （3）可以在相同条件下重复实验

- 样本空间：随机试验所有可能结果组成的集合
- 离散样本空间、无穷样本空间

随机事件

- 样本空间的任意一个子集称之为事件
- 事件发生：在一次试验中，事件的一个样本点发生
- 必然事件：样本空间全集
- 不可能事件：空集

事件的关系与运算

- 包含
- 相等
- 互斥
- 补
- 和
- 差
- 积

事件的运算律

- 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 对偶律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

概率

- 定义：为样本空间的每一个事件定义一个实数，这个实数称为概率。事件A的概率称为$P[A]$。

- 1、$P(A) \geq 0$
- 2、$\sum P(A) = 1$
- 3、设$A_1, A_2, \cdots$是两两互不相容的事件，则有
- $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$

概率若干性质

- $P(\emptyset) = 0$
- 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相交，则$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$
- 如果$A \subset B$，$P(B - A) = P(B) - P(A)$
- 更一般的，$P(B - A) = P(B) - P(AB)$
- $0 \leq P(A) \leq P(1)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

条件概率

- 则定义已知事件B发生时事件A发生的概率为$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

- 乘法法则：$P(AB)=P(A|B)P(B)$

条件概率性质

- $P(\emptyset|A) = 0$
- 设$B_1, \cdots, B_n$互不相容，则$P\left(\cup_{i=1}^{n} B_i \,\middle|A\right) = \sum_{i=1}^{N} P(B_i|A)$
- $P\left(\bar{B}\middle|A\right) = 1 - P(B|A)$
- $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(BC|A)$

期望

- $E[f(X)] = \sum \quad f(x)P(X = x)$

- 定理:
- $E[c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots] = c_1E[X_1] + c_2E[X_2] + \cdots$
- 如果X_1, X_2独立，则$E[X_1X_2] = E[X_1]E[X_2]$

- 期望的和=和的期望

Question 1

- 箱子里有三个1一个2，每次取一个数不放回
- 事件A：第一次取到1
- 事件B：第二次取到1
- 求$P(B|A)$

Question 2

- 某电子设备厂所用的joy-con手柄是由三家制造商制造的，且有如下数据

手柄制造厂	次品率	提供的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

- 1、任取一个手柄，是次品的概率为多少
- 2、任取一只，若它是次品，则由每个厂制造的概率分别是多少

独立事件

- 如果$P(AB) = P(A)P(B)$
- 那么AB独立

- 不可能事件、必然事件和任何事件都是独立的

独立事件

- A, B独立的$P(B|A) = P(B)$

Question 4.

假设有 3 张形状相同的卡片，其中一张两面都是黑色，一张两面都是红色，另一张是一面红一面黑，随机取出一张放在桌上，朝上的面为红色，那么另一面是黑色的概率是多少？

Question 5.

n 个人按任一顺序依次抓阄，每个人抓完阄后立即打开，当某个人抓到“中”时，整个抓阄过程结束（后面的人就不必抓了）．问：此种抓阄方式是否公平，请说明理由.

Question 7.

一个人左右口袋里各放一盒火柴，每盒 n 支，每次抽烟时随机选一盒拿出一支用掉，由于习惯的原因，选右面口袋的概率是 $p > \frac{1}{2}$． 问：下述两种情形的概率是否相等？试求概率的值.

（1） 到某次他发现取出的这一盒已经空了，这时另一盒恰有 m 支火柴.

（2） 到他用完某一盒时另一盒恰有 m 支火柴.

Question 9.

26. 设男女两性人口之比为 51:49. 又设男人色盲率为 2% ,女人色盲率为 0.25% . 现随机抽到一个人为色盲,问“该人为男人”的概率是多少?

Question 10

- 在小葱和小泽面前有三瓶药，其中有两瓶是毒药，每个人必须喝一瓶
- 小葱和小泽各自选了一瓶药，小泽手速比较快将药喝了下去，然后就挂掉了
- 小葱想活下去，他是应该喝掉手上的这瓶，还是另外剩下的一瓶呢？

Question 11

- 小胡站在原点，手里拿着两枚硬币。抛第一枚硬币正面向上的概率为p，第二枚正面向上的概率为q。
- 小胡开始抛第一枚硬币，每次抛到反面小胡就向x轴正方向走一步，直到抛到正面。
- 接下来小胡继续抛第一枚硬币，每次抛到反面小胡就向y轴正方向走一步，直到抛到正面。
- 现在小胡想回来了，于是他开始抛第二枚硬币，如果小胡抛到正面小胡就向x轴的负方向走一步，否则小胡就向y轴的负方向走一步。
- 现在小胡想知道他在往回走的时候经过原点的概率是多少呢?

Question 12

- 我们可以枚举小胡在第一轮中走到的点(x, y)
- 小胡走到点(x, y)的概率$(1-p)^{x+y} \times p^2$
- 小胡从点(x, y)走回原点的概率
- $q^x \times (1-q)^y \times \frac{(x+y)!}{x! \times y!}$

Question 12

- 所以最终的概率为
- $\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}(1-p)^{x+y}\times p^2\times q^x\times(1-q)^y\times\frac{(x+y)!}{x!\times y!}$
- 不好求?
- 改变枚举量

Question 12

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}(1-p)^{x+y}\times p^2\times q^x\times(1-q)^y\times\frac{(x+y)!}{x!\times y!}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}(1-p)^i\times p^2\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times\binom{i}{j}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i\times p^2\sum_{j=0}^{i}q^j\times(1-q)^{i-j}\times\binom{i}{j}$$

$$\binom{i}{j}=C_i^j=\frac{i!}{(i-j)!\times j!}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i\times p^2$$

为什么？

$$=p$$

Question 13

- 小葱想要过河，过河有两条路
- 一条路有100个石头，每个石头有$\frac{1}{100}$的概率会挂掉
- 一条路有1000个石头，每个石头有$\frac{1}{1000}$的概率会挂掉
- 小葱应该走哪边呢？
- 请勿使用计算器

Question 13

- $(\frac{999}{1000})^{10} > \frac{999}{1000} \times \cdots \times \frac{990}{991} = \frac{99}{100}$
- $(\frac{999}{1000})^{1000} > (\frac{99}{100})^{100}$

Question 14

- 小泽在数轴上的0点处
- 小泽每次有r的概率向右走，有$1-r$的概率向左走
- 问小泽走到-1处的概率

Question 14

- 如果直接列求和式计算
- 大量组合数求和，卡特兰数，级数
- 设答案为p，则
- $p = 1 - r + r \times p^2$
- $rp^2 - p + 1 - r = 0$
- $p = 1$舍去 $p = \frac{1-r}{r}$
- 结束了？

Problem 4

- 当$r < \frac{1}{2}$时，p是多少?
- 此时应有$p = 1$

Question 15

- 小胡有一棵一个点的树，小胡会给这个点浇水，于是这个点会有p的概率长出两个儿子节点。
- 每次长出新的节点之后，小胡又会给新的节点浇水，它们也都有p的概率长出两个新的儿子节点。
- 小胡不希望自己被累死，所以小胡希望知道这棵树的大小是有限的的概率。

Question 15

- 稍加观察分析便可知道
- 这个问题与Problem 4一模一样
- 如何证明等价?

Problem 1

- 给出一个无向图，两个人初始在两个点上。当一个人在一个点i上的时候，每一次，他有p[i]的概率留在原位，有1−p[i]的概率等概率地选择直接连边的一个点走出去。当两个人在同一时刻走到同一个点，那么他们相遇，过程结束。现在求他们在每一个点相遇的概率。

- $n \leq 20$

Problem 1

- 将问题转换为期望次数

- f[i][j]表示在移动过程中该状态发生的期望次数
- 最后每个点的期望次数即为概率
- 高斯消元即可
- BZOJ 3270

Problem 2

- N次挑战 容量为K的包
- 依次$1-N$进行N次挑战 第i个挑战成功率为p_i 属性为a_i
- 如果$a_i \geq 0$ 挑战成功则容量增加a_i
- 如果$a_i = -1$，则挑战成功会得到一个体积为1的物品
- 至少要挑战成功L次并且把所有得到的物品带走才算成功
- 问成功的概率
- $K \leq 2000, L \leq N \leq 200, -1 \leq a_i \leq 1000$

Problem 2

- Dp+空间优化
- F[i][j][k]
- 前i次成功j次 体积还剩k

- BZOJ 3029

Problem 3

- 给定一棵树
- 每条边有一定通电的概率
- 每个点有一定充电的概率
- 问期望有多少个点能有电

- $N \leq 500000$

Problem 3

- 转化为求每个点通电的概率
- F[i]表示子树内部能够使得i通电的概率
- G[i]表示i能够通电的概率
- F[i]树形dp搞定
- G[i]再dfs一次搞定

- BZOJ 3566

Problem 4

- N*M的格子
- 每次随机刷掉一个矩形
- 问K次之后期望刷掉了多少个格子
- N,M<=1000,K<=100

Problem 4

- 期望染的格子数=每个格子期望染的概率之和
- K次染一个格子的期望概率
- 补集转化
- BZOJ 2969

Problem 5

- 检验矩阵A*B=C是否成立
- N<=1000

Problem 5

- A:N*N B:N*N C:N*N
- D:N*1 0和1组成的矩阵
- A*B=C
- (A*B)*D=C*D
- A*(B*D)=C*D
- 复杂度N^2
- BZOJ 2396

Problem 6

- 给定平面上N个点
- 找到一个最小的圆覆盖住他们

- $N \leq 10^6$

Problem 6

- 随机化

Problem 7

- N次操作，第i次操作成功的概率为p_i
- 成功记为1否则记为0
- 连续x个1会贡献x^3的分数
- 求期望分数

- $N \leq 10^5$

Problem 7

- $f[i]$表示结尾部分期望长度
- $g[i]$表示结尾部分长度平方和的期望
- $h[i]$表示结尾部分长度三次方和的期望

- $f[i] = (f[i-1]+1) \times p[i]$
- $g[i] = (g[i-1]+2 \times f[i-1]+1) \times p[i]$
- $h[i] = (h[i-1]+3 \times g[i-1]+3 \times f[i-1]+1) \times p[i]$
- BZOJ 4318

Problem 8

- 给定一个排列
- 每次随机交换两个位置
- 问最后期望的逆序对数量

- $N \le 5 \times 10^5, k \le 10^9$

Problem 8

- 考虑给定数对(A, B)
- 如果A, B不在给定位置上，剩下每个位置的概率都相等
- 考虑$(A, B), (B, A), (A, C), (C, A), (B, C), (C, B), (C, C)$这七种关系之间的转移即可

- BZOJ 5058